УДК 517.929

Н. И. Желонкина

МЕТОД «ЗАМОРАЖИВАНИЯ» ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости линейной разностной системы с мало меняющимися в среднем правыми частями, которые являются аналогом для разностных уравнений результатов В. Е. Гермаидзе [1, 2].

Рассматривается линейная разностная система уравнений

$$x_{n+1} = A_n x_n, \tag{1}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ – дискретное время; x – m-мерный вектор; A_n – матрица порядка $m \times m$.

Для всех решений соответствующего семейства «замороженных» систем с постоянными коэффициентами

$$y_{n+1} = A_s y_n, \tag{2}$$

где $s = \text{const}$; $s = 0, 1, 2, \ldots$, выполняется оценка

$$\|y_n^s\| < Lg^n \|y_0\|, \tag{3}$$

где $n \geq 0$, $L > 0$, $0 < g < 1$, т. е. система (2) экспоненциально устойчива.

Теорема 1. *Если A_n – ограниченная по n матрица и существуют целые числа $T_0 \geq 1$ и $N \geq 0$ такие, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{T_0} \sum_{k=n}^{n+T_0-1} \|A_k - A_n\| < \delta, \tag{4}$$

где постоянная δ может принимать достаточно малые значения, то из экспоненциальной устойчивости семейства (2) *вытекает экспоненциальная устойчивость системы* (1).

Доказательство. Представим систему (1) в виде

$$x_{n+1} = A_s x_n + (A_n - A_s)x_n, \tag{5}$$

где s – постоянная, которую выберем позднее. Будем оценивать решение этой системы при $n \geq N$ на промежутке длины $T = \nu T_0$. Здесь ν – любое целое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\nu > \frac{\ln L}{T_0 \ln \frac{1}{g}}. \tag{6}$$

По формуле вариации произвольных постоянных [3, с. 36] имеем

$$x_{n+T} = Y^s_{n+T,n} x_n + \sum_{k=n}^{n+T-1} Y^s_{n+T,k+1}(A_k - A_s)x_k, \tag{7}$$

где $Y^s_{n,k} = Y^s_n (Y^s_k)^{-1}$; Y^s_n – фундаментальная матрица системы (2). В силу неравенства (3) имеем

$$\|Y^s_{n,k}\| < Lg^{n-k}. \tag{8}$$

Оценивая решения по норме и учитывая (8), получаем

$$\|x_{n+T}\| < Lg^T \|x_n\| + \sum_{k=n}^{n+T-1} Lg^{n+T-k-1} \|A_k - A_s\| \|x_k\|. \tag{9}$$

Отсюда, используя аналог леммы Веллмана [3, с. 41] и полагая $s = n$, имеем

$$\|x_{n+T}\| < \|x_n\| Lg^T \exp(\sum_{k=n}^{n+T-1} \frac{L}{g} \|A_k - A_n\|). \tag{10}$$

Наконец, в силу неравенства (4), при $n \geq N$ приходим к неравенству

$$\|x_{n+T}\| < \|x_n\| \exp(\ln L + T \ln g + \frac{L}{g} \delta T). \tag{11}$$

Выберем постоянную p, $0 < p < 1$, $p > g$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\ln L}{T} + \ln g + \frac{L}{g}\delta < \ln p. \tag{12}$$

Это неравенство выполняется, если постоянная δ достаточно мала, а именно если δ удовлетворяет оценке

$$\delta < \frac{g}{L}(\ln \frac{1}{g} + \ln p - \frac{\ln L}{T}). \tag{13}$$

Итак, при $n \geq N$ для всякого решения системы (1) имеем

$$\|x_{n+T}\| < \|x_n\| p^T. \tag{14}$$

Рассмотрим далее систему (1) на конечном промежутке $0 \leq n \leq N$; при заданном p выбором постоянной L_1 всегда можно добиться выполнения оценки

$$\|x_n\| \leq L_1 p^N \|x_0\|, \quad 0 \leq n \leq N. \tag{15}$$

Возьмем произвольное решение системы (1) при $n > N$, тогда, в силу (14), получим

$$\|x_n\| < \|x_{n-T}\| p^T < \|x_{n-2T}\| p^{2T} < \cdots < \|x_{n-lT}\| p^{lT}. \tag{16}$$

Оценку производим до тех пор, пока не получим $n - lT \leq N$. Учитывая (15), имеем

$$\|x_n\| < L_1 p^N \|x_0\| p^{lT} < L_1 p^{n-lT} \|x_0\| p^{lT} = L_1 p^n \|x_0\|, \tag{17}$$

что доказывает теорему.

Замечание. Как следует из доказательства теоремы, число T, на котором мы оцениваем решение, можно увеличивать, а число p можно сделать как угодно близким к единице, поэтому, в силу (13), предельное значение постоянной δ, для которой справедливы условия теоремы, дает оценка

$$\delta < \frac{g}{L} \ln \frac{1}{g}. \tag{18}$$

Отметим, что при доказательстве теоремы использовался метод, изложенный в [4].

Аналогично можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Система* (1) *экспоненциально устойчива, если A_n – ограниченная по n матрица и существуют постоянная матрица C со спектром, расположенным внутри единичного круга, и целые числа $T \geq 1$ и $N \geq 0$ такие, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{T} \sum_{k=n}^{n+T-1} \|A_k - C\| < \delta, \tag{19}$$

где постоянная δ достаточно мала.

Следствием этой теоремы является известный результат об условиях устойчивости в случае линейных периодических систем [5, с. 70].

Теорема 3. *Рассмотрим систему*

$$x_{n+1} = (A + B_n)x_n, \tag{20}$$

где A – постоянная матрица со спектром, расположенным внутри единичного круга, B_n – ограниченная по n матрица. Если существуют целые числа $T \geq 1$ и $N \geq 0$ такие, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{T}\sum_{k=n}^{n+T-1} \|B_k\| < \delta, \tag{21}$$

где число δ достаточно мало, то система (20) экспоненциально устойчива.

Замечание. В теоремах 2 и 3 оценку δ дает неравенство (18).

Этим же методом можно доказать теорему об устойчивости по первому приближению при достаточно малых в среднем нелинейных членах.

Теорема 4. *Рассмотрим систему*

$$x_{n+1} = A_n x_n + f_n(x_n), \tag{22}$$

где $f_n(0) = 0$ и $\|f_n(x)\| \leq \varphi_n\|x\|$ для всех $n \geq 0$. Если система первого приближения $x_{n+1} = A_n x_n$ экспоненциально устойчива и существует по крайней мере одно число $T \geq 1$ такое, что при всех $n \geq 0$ выполняется условие

$$\frac{1}{T}\sum_{k=n}^{n+T-1} \varphi_k < \eta,$$

где постоянная η достаточно мала, то нулевое решение системы (22) также экспоненциально устойчиво.

Литература

1. Гермаидзе В. Е. Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 4. С. 149–156.

2. Гермаидзе В. Е. Об асимптотической устойчивости по первому приближению // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 1. С. 133–135.

3. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наук. думка, 1972.

4. Hale J. K., Stokes A. P. Conditions for the stability of nonautonomous differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1961. Vol. 3. P. 50–69.

5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М: Мир, 1971.

Статья поступила 19.10.2002 г.